# Une preuve simple de résultats classiques en lambda-calcul

René David

**Une preuve simple de résultats classiques en λ calcul**
(A simple proof of basic results in λ calculus)

René David

Résumé : Nous donnons une preuve simple de 3 théorèmes " de base " du lambda calcul pur : le théorème de Church - Rosser, le théorème de standardisation et le théorème des développements finis. Nous donnons également une généralisation - dans le lambda calcul pur - du théorème des développements finis qui a comme corollaire immédiat le théorème de normalisation forte dans le système de types simples avec intersection .

Abstract : We give a simple proof of 3 basic theorems of pure lambda calculus : the Church-Rosser theorem, the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem . We also give an extension - in the pure lambda calculus - of the later that immediately gives the strong normalisation theorem for the type system D (simple types with intersection).

## Abridged version

Usually in courses on Lambda Calculus, the Church-Rosser theorem is first proved and then the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem . I give here a complete proof of these theorems by showing first the standardisation theorem, then the finiteness of developpements theorem and finally the Church-Rosser theorem.

*notations* : Red(t) denotes the set of redexes in t. For F $\wp$ Red(t), a sequence - finite or infinite - of reductions t = $t_0$ -> $t_1$ -> ... is an F developpement of t ( it is denoted by t $->_F$ t' if it is finite and finishes with t' ) iff the reduced redexes are residues of redexes in F.

t $->^R$ t' means that t gives t' by reducing the redex R. A sequence - finite or infinite - of reductions t = $t_0$ $->^{R_0}$ $t_1$ $->^{R_1}$ ... is a standard reduction ( it is denoted t $->_{st}$ t' if it is finite and finishes with t' ) if there is no pair (i,j) such that i>j and $R_i$ is a residue of a redex in $t_j$ on the left of $R_j$. t $->_{st,F}$ t' denotes a sequence of reductions that is both standard and an F developement of t.

*Sketch of proofs* : - The standardisation theorem is proved by induction on lg(t->* t') (where lg(t->* t') is the length of the reduction t->* t' ) by showing : 1) that $->_{st}$ , $->_F$ , $->_{st,F}$ , are congruences (lemma 1, proved by induction on (lg(u-> u'), cxte(u)) where cxte(t) represents the complexity of t ) and 2) that if t $->_{st}$ $t_1$ $->^R$ $t_2$ then t $->_{st}$ $t_2$ ( lemma 2, proved by induction on (lg(t $->_{st}$ $t_1$), cxte(t) ).

- The theorem on the finiteness of developpements is proved by induction on cxte(t), after having proved (lemma 1, proved by induction on cxte(t), using the theorem I) that if t and **a** satify the theorem, then so does t[**a**/**x**], where **a** is any sequence of terms.

- The Church-Rosser theorem is proved by showing that $->_F$ is confluent. This follows immediately from the standardisation theorem and the fact that $->_F$ is strongly normalizing.
- The theorem IV is an immediate consequence of the following extension of the theorem II. First, a slight extension of the notion of redex is necessary to - I believe - better capture the notion of creation of a redex : a term (a b) is a (generalized) redex if a ->* $\lambda$x a'. For F $\wp$ Red(t), associate to every R in F a natural number. Define F developpements as follows : Recursively allow the reduction of the redex S iff the number associated to S is positive. If S is a residue of R, associate to S the same number as the one of R. If S has been created by the reduction of R ( and n is associated to R ) , associate (n-1) to S. With this notion of developpement, every term is strongly normalizing and the proof is essentially the same as the one of the theorem II.

## 0 Définitions et notations

Les notions ( notamment celles de résidus ) et notations sont standards. Voir [Bar] ou [Kr]. L'application de u à v est notée (u v) ( voir [Bar] ). Le système de types simples avec intersection est le système appelé système D dans [Kr].
- t -> t' (resp t -> * t' ) signifie qu'on passe de t à t' par une (resp un nombre quelconque de ) $\beta$ réductions . On utilisera indistinctement cette notation pour indiquer que t peut se réduire à t' ou pour représenter une réduction particulière ( dans ce cas on notera lg(t->* t') la longueur de cette réduction ), le contexte indiquant clairement le sens.
- t $\xrightarrow{R}$ t' signifie qu'on passe de t à t' en réduisant le radical R .
- cxté(t) représente la complexité de t .
- On note Red(t) l'ensemble des radicaux de t . soit F $\wp$ Red(t) : une suite - finie ou infinie - de réductions t = $t_0$ -> $t_1$ -> ... est un F développement de t ( et on la notera t $->_F$ t' si elle est finie et se termine par t' ) ssi les radicaux réduits sont tous des résidus de radicaux dans F. t $->_F$ t' est un F développement complet de t si t' ne contient pas de ( résidus de ) radicaux de F.
- Une suite - finie ou infinie - de réductions t = $t_0$ $\xrightarrow{R_0}$ $t_1$ $\xrightarrow{R_1}$ ... est une réduction standard ( et on la notera t $->_{st}$ t' si elle est finie et se termine par t' ) ssi il n'y a pas de couple (i,j) tel que i>j et $R_i$ est le résidu d'un radical de $t_j$ qui est à gauche de $R_j$ .
- on notera t $->_{st,F}$ t' une chaine de réductions qui est à la fois une réduction standard et un F développement de t.
- Dans toute la suite **a**, **b**, ... représenteront des suites de termes .
- on notera (u $a_1$ $a_2$ ...$a_n$) pour (...(u $a_1$) $a_2$) ...)$a_n$)

**Théorème 1** (*de standardisation*)

Si t ->* t' alors t $->_{st}$ t' . De plus cette preuve est constructive et si t $->_F$ t' alors la réduction standard obtenue est aussi un F développement de t .

**Corollaire**

Si t n'est pas fortement normalisable alors il existe une réduction standard infinie : t = $t_0$ -> $t_1$ -> ...

**Théorème 2** *(des développements finis)*

Soit F $\wp$ Red(t) : Il n'existe pas de F développement infini de t.

**Théorème 3** (*confluence de la $\beta -$réduction*)

Si t ->* $t_1$ et t ->* $t_2$ alors il existe $t_3$ tel que $t_1$ ->* $t_3$ et $t_2$ ->* $t_3$ .

**Théorème 4** (*de normalisation forte*)

Tout terme typable dans le système de type simple avec intersection est fortement normalisable .

*Remarques :* les preuves ci dessous " correspondent " d'une certaine maniere à celles qu'on peut trouver dans la thèse de JJ Levy ( [Le] ) dans un cadre étiqueté . Dans [Le] la standardisation n'est prouvée que dans le cas de termes fortement normalisables . La notion de radical généralisée introduite au § IV semble être la "bonne " notion quand on étudie la création de radicaux .

**I Preuve du théorème 1**

**Lemme I.1** :

$->_{st}$ , $->_F$ , $->_{st,F}$ , passent au contexte , i.e (par exemple)
si u$->_{st}$ u' , a $->_{st}$ a' alors u[a/x] $->_{st}$ u'[a'/x] , λx u $->_{st}$ λx u' et
(u a) $->_{st}$ (u' a')

*preuve :* ( pour $->_{st}$ , les autres sont identiques ) Le résultat est clair pour λx u et (u a) ; pour u[a/x] on le prouve par récurrence sur (lg(u$->_{st}$ u'), cxté(u)) ordonné lexicographiquement .
- si u=λy v ou u=(y **v**) où y est une variable : évident
- si u=(λy b c **d**) : si le radical (λy b c) n'est pas réduit dans u$->_{st}$ u' le résultat est clair, sinon il est réduit en premier et on a u->( b[c/y] **d**)$->_{st}$ u' et u[a/x] -> ( b[c/y] **d**)[a/x])$->_{st}$ u'[a'/x] est - par hypothèse de récurrence - standard →

*preuve du théorème* : par récurrence sur lg( t ->* t') ; il suffit de prouver :

**Lemme I.2**

Si t $->_{st}$ $t_1$ $\overset{R}{->}$ $t_2$ alors t $->_{st}$ $t_2$ .

*Preuve* : par récurrence sur (lg(t $->_{st}$ $t_1$), cxté(t) ) ordonné lexicographiquement .
- si t= λx u ou t = (x **a**) le résultat est trivial .
- si t= (λx a b **c**) ; soit S le radical (λx.a b)

- si S n'a pas été réduit dans t $->_{st}$ $t_1$ alors $t_1$ = (λx $a_1$ $b_1$ $\mathbf{c}_1$) avec a$->_{st}$ $a_1$, b$->_{st}$ $b_1$, **c**$->_{st}$ $\mathbf{c}_1$ .

- si R est le résidu de S alors ( par le lemme I.1 ) t -> (a[b/x] **c**) $->_{st}$ ($a_1$[$b_1$/x] $\mathbf{c}_1$) = $t_2$ est une réduction standard .

- sinon R est un radical dans $a_1$ ou dans $b_1$ ou dans $\mathbf{c}_1$; supposons qu'il est dans $a_1$ ( les autres cas sont identiques) alors

$a \to_{st} a_1 \to^{R} a_2$ et $t_2 = (\lambda x\ a_2\ b_1\ \mathbf{c}_1)$ ; par hypothèse de récurrence ( appliquée à $a \to_{st} a_1 \to^{R} a_2$) on a $a \to_{st} a_2$ et donc ( par le lemme I.1) $t \to_{st} t_2$ .

- si S a été réduit dans $t \to_{st} t_1$ : comme la réduction est standard, il a été réduit en premier donc : $t \to ( a[b/x]\ c) \to_{st} t_1$; par hypothèse de récurrence appliquée à $( a[b/x]\ c ) \to_{st} t_1 \to^{R} t_2$ on a $( a[b/x]\ c) \to_{st} t_2$ et donc $t \to_{st} t_2$ →

*preuve du corollaire* : à partir d'une suite infinie de réductions on en construit une qui est standard en itérant le processus suivant : on regarde le radical ($\lambda x$ a b) le plus à gauche ; s'il n'est pas réduit au cours de la réduction infinie, a ou b admet une réduction infinie et on itère avec a ou b ; sinon on utilise le théorème pour obtenir une nouvelle suite infinie de réductions dans laquelle ce radical est réduit en premier →

## II Preuve du théorème 2

**Lemme II.1**

Soit t un terme, **a** une suite de termes et F $\wp$ Red(t) $\approx$ Red(**a**) . Si t[**a**/**x**] a un F développement infini , alors il y en a un dans t ou dans l'un des $a_i$ .

*Preuve* : par récurrence sur cxté(t) .
- si t=λx u ou si t=(y **b** ) et y n'est pas dans **x** : trivial
- si t=(x **b**) : t[**a**/**x**] = (a **b** [**a**/**x**] ) or l'application qui est à la racine de (a **b** [**a**/**x**] ) ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F et on conclut par récurrence .
- si t= (λy b d **c**) , soit S le radical (λy b d)
  - si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure .
  - sinon, par le théorème 1 on peut supposer que S est réduit le premier donc t[**a**/**x**] -> ( b[**a**/**x**,d[**a**/**x**]/y] **c**[**a**/**x**] ) $\to_F$...

Or l'application qui est à la racine de ( b[**a**/**x**,d[**a**/**x**]/y] **c**[**a**/**x**] ) ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F ; on a donc un F développement infini dans **c**[**a**/**x**] ou dans b[**a**/**x**,d[**a**/**x**]/y] et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence →

*Preuve du théorème* : par récurrence sur cxté(t) ; on suppose qu'il existe un F développement infini de t .
- si t= λx u ou t = (x **a**) le résultat est trivial .
- si t= (λx a b **c**) , soit S le radical (λx a b) .
  - si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure .
  - sinon on a t $\to_F$ $t_1$ = (λx $a_1$ $b_1$ $c_1$) $\to_F$ ($a_1[b_1/x]$ $\mathbf{c}_1$) $\to_F$ ... ; par le théorème 1 on a t $\to_{st,F}$ ($a_1[b_1/x]$ $\mathbf{c}_1$) $\to_F$ ... et donc t-> (a[b/x] **c**) $\to_F$ ($a_1[b_1/x]$ $\mathbf{c}_1$) $\to_F$ ...; or l'application qui est à la racine de (a[b/x] **c**) ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F, on a donc un F développement infini dans **c** ou dans a[b/x] ; on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme II.1 →

## III Preuve du théorème 3

**Lemme III.1**

La cloture transitive d'une relation qui a la propriété de Church - Rosser a aussi cette propriété .

*Preuve* : trivial →

En appliquant le lemme III.1 à $\to_F$ où F = Red(t) , il suffit de prouver :

**Lemme III.2**

Si t $\to_F$ $t_1$ et t $\to_F$ $t_2$ alors il existe $t_3$ tel que $t_1$ $\to_F$ $t_3$ et $t_2$ $\to_F$ $t_3$

*preuve* : Soit t $\to_F$ $t_1$ et t $\to_F$ $t_2$ ; soit $F_i$ = { R / R Red($t_i$), R résidu d'un radical dans F } ; par le lemme III.3 ci-dessous soit $t_i$ -> $u_i$ un $F_i$ développement complet de $t_i$, alors t -> $t_1$ ->$u_1$ et t -> $t_2$ ->$u_2$ sont des F développements complets de t donc $u_1$ = $u_2$ →

**Lemme III.3**

Pour tout t et F $\wp$ Red(t) il existe un F développement complet de t ; si t -> $t_1$ et t -> $t_2$ sont des F développements complets de t alors $t_1 = t_2$ .

*preuve* : L'existence est conséquence immédiate du théorème 2 .
Unicité : par le théorème 1 il suffit de montrer que si t $->_{st,\ F}$ $t_1$ et
t $->_{st,\ F}$ $t_2$ sont des F développements complets alors $t_1 = t_2$ . La preuve - par récurrence sur ( lg(t $->_{st,\ F}$ $t_1$)+lg(t $->_{st,\ F}$ $t_2$) , cxté(t)) - est immédiate $\rightarrow$

## IV Preuve du théorème 4

Le théorème 4 est un corollaire immédiat de la proposition IV.1 et du lemme IV.2 . La proposition IV.1 signifie - intuitivement - que si on autorise la réduction des radicaux créés jusqu'à un ordre marqué, alors le théorème des développements finis reste valide.

**Définitions**

1) un radical généralisé est un terme de la forme (a b) où a ->* λx a'. On note GRed(t) l'ensemble des radicaux généralisés de t.

2) Soit t un terme . On note FGRed(t) l'ensemble des fonctions de domaine un sous ensemble de GRed(t) à valeurs dans N.

3) Soit t$->^R$ t' et S   GRed(t') . S est créé par la réduction de R si R est de la forme (λx ... (a b) ... c), (a b) n'est pas un radical généralisé et S est (a[c/x] b[c/x]).
*Remarque* : cette notion n'est pas *exactement* la notion usuelle de création . Il y a - avec la notion usuelle - 3 situations de création de radicaux : R = (λx λy a  b  c) et S = (λy a[b/x] c), R = ((λx x) (λy a)  b) et S = (λy a b) et enfin R = (λx ... (x a) ... λy b) et S = (λy b a[λy b/x] ). On considère ici que dans les deux premieres situations il n'y a pas création : les radicaux - généralisés - étaient déja présents .

4) Soient t un terme et F   FGRed(t) : une suite - finie ou infinie - de réductions t = $t_0$ -> $t_1$ -> ... est un F développement de t ( et on la notera t $->_F$ t' si elle est finie et se termine par t' ) ssi pour tout radical R réduit $\phi(R)$ est défini et positif où, pour tout R   GRed($t_k$), $\phi(R)$ est défini par récurrence sur k par:
- si R   GRed($t_0$): $\phi(R)$=F(R)
- si R   GRed($t_{k+1}$) et R est un résidu de S   GRed($t_k$) : $\phi(R) = \phi(S)$
- si R est créé par la réduction de S : $\phi(R) = \phi(S)$-1.
( *note* : la notion de résidu - habituellement défini pour les radicaux - se généralise immédiatement aux radicaux généralisés)

5) Soient t un terme et F   FGRed(t) : t est F fortement normalisable ssi t n'a pas de F développement infini; on note alors Long(F,t) la longueur du plus grand F développement de t ( le lemme de König montre que ce nombre existe ) .

**Proposition IV.1**

Soit t un terme et F   FGRed(t). Alors t est F fortement normalisable.

**Définition**

On définit la hauteur ht(a) d'un type par :

- si a est atomique : ht(a) = 0
- si a = b->c ou a = b  c : ht(a)=max(ht(b), ht(c) ) +1

Soit t un terme typé et R = (a b) un radical généralisé de t alors ht(R) = ht($\alpha$) où $\alpha$ est le type de a.

**Lemme IV.2**

Si t $->^{R}$ t' et S  GRed(t') est créé par R alors ht(S) < ht(R) .

*preuve* : immédiat →

**Définitions**

1) Soient t un terme, **a** une suite de termes, G  FGRed(t), **A**  FGRed(**a**) et n un entier, on note Subst(t, n, G, [<$x_1$,$a_1$,$A_1$>, ...]) la fonction F  FGRed(t[**a**/**x**]) définie par F = G ≈ A ≈ {(R,n) / R  GRed(t[**a**/**x**]) - GRed(t) - ≈ GRed(**a**) }

2) Si F  FGRed(t) et u est obtenu à partir de sous termes de t, on parlera encore - pour éviter d'alourdir les notations - de F développement de u au lieu de F' développement où F' = F ↔ (GRed(u) ∞ N)

**Lemme IV.3**

Soit t un terme et F  FGRed(t) ; si t $->_{F}$ t' il existe F'  FGRed(t') tel que pour tout t" : t' $->_{F'}$ t" ssi t -> t' -> t" est un F développement. On note F' = Res(F, t $->_{F}$ t')

*preuve* : immédiat →

**Lemme IV.4**

Soit t un terme et F  FGRed(t) ; si t $->_{F}$ t' alors t $->_{st,F}$ t' .

*preuve* : Elle est identique à celle du théorème 1 .

On montre d'abord l'analogue du lemme I.1, i.e que si F  FGRed(u), A  FGRed(a), u $->_{st,F}$ u' et a $->_{st,A}$ a' alors $\lambda$x u $->_{st,F}$ $\lambda$x u', (u a) $->_{st,F\approx A}$ (u' a') et u[a/x] $->_{st,F\approx A}$ u'[a'/x] . On montre ensuite l'analogue du lemme I.2, i.e que si F  FGRed(t) et t $->_{st}$ $t_1$ $->^{R}$ $t_2$ est un F développement de t alors t $->_{st,F}$ $t_2$ . On vérifie simultanément que si t $->_{st,F}$ $t_1$ est la standardisation de t $->_{F}$ $t_1$ alors Res( F, t $->_{F}$ $t_1$) = Res (F, t $->_{st,F}$ $t_1$) . Pour le dernier cas étudié dans cette preuve on applique l'hypothèse de récurrence à ( a[b/x] c ) $->_{st}$ $t_1$ $->^{R}$ $t_2$ et F'= Res(F, t $->_{F}$ ( a[b/x] c ) ) . →

**Lemme IV.5**

Soient t un terme, **a** une suite de termes, G  FGRed(t), **A**  FGRed(**a**) et n un entier . Si t (resp **a**) est G (resp **A**) fortement normalisable alors t[**a**/**x**] est Subst(t, n, G, [<**x**, **a**, **A**>]) fortement normalisable.

*preuve* : par récurrence sur (n, Long(G,t), cxté(t)). Raisonnons par l'absurde :
- si t = $\lambda$y u ou t = (y **b**) et y n'est pas dans **x** le résultat est trivial.
- si t= ($\lambda$y b c  **d**) : Si le radical ($\lambda$y b c ) n'est pas réduit le résultat est trivial, sinon - par le lemme IV.4 - on peut supposer qu'il est réduit en premier : t[**a**/**x**] -> (b[c/y] d) [**a**/**x** ]->... et on conclut par l'hypothèse de récurrence car Long(Res(G, t-> (b[c/y] d)), (b[c/y] d)) < Long(G,t).

- si t = (x b **c** ) : le seul cas non trivial est celui où il existe un A développement de a aboutissant à λy d et que le radical (λy d  b[**a**/**x**]) est réduit. Par le lemme IV.4 on peut supposer que le début du développement est : t[**a**/**x**] ->* (λy d  b[**a**/**x**] **c**[**a**/**x**]) ->(d[b[**a**/**x**]/y] **c**[**a**/**x**]) ->... ; la suite est un D développement de (z **c**)[**a**/**x**, d[b[**a**/**x**]/y]/z] où D = Subst((z **c**), n, G, [<**x**, **a**, **A**>,<z, d[b[**a**/**x**]/y], B>]) où B = Subst(d, n-1, Res(A,a-> λy d), [<y,b[**a**/**x**],C>]) où C = Subst(b,n,G,[<**x**,**a**,**A**>]). L'hypothèse de récurrence permet de conclure successivement que b[**a**/**x**] est C fortement normalisable, que d[b[**a**/**x**]/y] est B fortement normalisable et enfin que (d[b[**a**/**x**]/y] **c**[**a**/**x**]) est D fortement normalisable →

*preuve de la proposition IV.1*: par récurrence sur cxté(t) ; on suppose qu'il existe un F développement infini de t .
- si t= λx u ou t = (x **a**) le résultat est trivial .
- si t= (λx a b **c**) , soit S le radical (λx a b) :
    - si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure .
    - sinon par le lemme IV.4 on peut supposer que S est réduit en premier : t ->( a[b/x] **c** ) -> $_F$ ... . Soit n = F((λx a b)); l'hypothèse de récurrence et le lemme IV.5 permettent de conclure →

**Remarque**

On peut également étendre le théorème des développements finis de la maniere suivante . Soient t un terme et F ℘ Red(t) ; il n'existe pas de F+ développement infini de t où dans un F+ développement on s'autorise à réduire les radicaux S créés - au sens usuel du terme - par la réduction de radicaux R dans l'une des situations suivantes :
- R = (λx λy a  b  c) et S = (λy a[b/x] c)
- R = ((λx x) (λy a)  b) et S = (λy a  b) .

**Références**


[Bar] H Barendregt : The lambda calculus, its syntax and semantics
North Holland 1984

[Kr] J L Krivine : Lambda Calcul, types et modèles
Masson 1992

[Le] J J Lévy : Réductions correctes et optimales dans le lambda calcul ( thèse Université Paris 7, 1978 )



R David
Laboratoire de Mathématiques
Université de Chambéry
73376 Le Bourget du Lac (France)
email david@univ-savoie.fr
tel (33) 79 75 87 17
fax (33) 79 75 87 42